

単位単体のミンコフスキ和の トーリックイデアル

関西学院大学理工学部数理科学科
大杉英史

オンライン研究集会「組合せ論と可換環論」

1



目次

1. 小田予想, Bøgvad予想
2. Generalized permutohedra
3. 主定理
4. 一般化された入れ子配置 (渋田敬史 (2012))
5. 主定理の証明の概略

A. Higashitani and H. Ohsugi,
Toric ideals of Minkowski sums of unit simplices
Algebraic Combinatorics, in press.

2



小田予想, Bøgvad予想

定義 $P \subset \mathbb{R}^d$: d 次元格子多面体

P が **integer decomposition property** を持つ (IDP)

$\Leftrightarrow$ 任意の $0 < n \in \mathbb{Z}$ と $\alpha \in nP \cap \mathbb{Z}^d$ に対して,
def $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ をみたす $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in P \cap \mathbb{Z}^d$ が存在

定義 $P \subset \mathbb{R}^d$: d 次元格子多面体

P が **非特異 (smooth)**

$\Leftrightarrow$ P の任意の頂点 v に対して, v に隣接する頂点への原始方向ベクトルの集合が $\mathbb{Z}^d$ の $\mathbb{Z}$ 基底をなす。

3



小田予想, Bøgvad予想

定義 $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\} \subset \mathbb{Z}^d$ (多重集合)

A が **配置** $\Leftrightarrow \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ が存在して, $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_i = 1$ ($i = 1, \dots, m$)
(以後, A は配置であると仮定する。)

$K[t^\pm] = K[t_1^\pm, \dots, t_d^\pm]$: 体 K 上のローラン多項式環

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Z}^d \Rightarrow t^{\mathbf{a}} := t_1^{a_1} \dots t_d^{a_d}$$

$$K[A] := K[t^{\mathbf{a}_1}, \dots, t^{\mathbf{a}_m}] \quad \text{Aのトーリック環}$$

$$I_A := \text{Ker} \left(\begin{array}{ccc} \pi: K[x_1, \dots, x_m] & \rightarrow & K[A] \\ x_i & \mapsto & t^{\mathbf{a}_i} \end{array} \right)$$

Aのトーリックイデアル

4



小田予想, Bøgvad予想

定義 $P \subset \mathbb{R}^d$: 格子多面体

配置 $A_P := \{(\alpha, 1) \in \mathbb{Z}^{d+1} : \alpha \in P \cap \mathbb{Z}^d\}$ のトーリックイデアル
を P の **トーリックイデアル** という

予想 $P \subset \mathbb{R}^d$: 非特異な格子多面体

(小田) P は IDP

(Bøgvad) P のトーリックイデアルは2次生成である

- 2次元の場合は両方正しい。
- 小田予想は 3次元 centrally symmetric polytope の場合に正しい。(Beck-Haase-Higashitani-Hofscheier-Jochemko-Katthän-Michalek (2019))

5



Generalized permutohedra

定義 (generalized permutohedra) $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$

$$P_n^Z(\{z_I\}) := \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n t_i = z_{[n]}, \sum_{i \in I} t_i \geq z_I \ (\emptyset \neq I \subsetneq [n]) \right\}$$

ただし, $\{z_I\}$ は $z_I \geq 0$ ($\emptyset \neq I \subset [n]$) をみたすパラメータであり,
 $\mathbb{R}^{2^n-1}$ の “ある $2^n - 1$ 次元多面体領域” に属する。

定義 $I \subset [n]$ に対して, $\Delta_I := \text{conv}\{e_i : i \in I\}$ とおく。

$$P_n^Y(\{y_I\}) := \sum_{I \subset [n]} y_I \Delta_I$$

ただし, 和はミンコフスキ和を表し, $\{y_I\}$ は $y_I \geq 0$ ($\emptyset \neq I \subset [n]$) をみたすパラメータである。

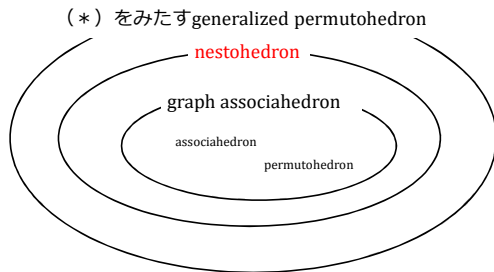
Postnikov (2009) $z_I = \sum_{j \in I} y_j$ とおけば, $P_n^Y(\{y_I\}) = P_n^Z(\{z_I\})$.

6



Generalized permutohedra

$y_I \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($I \subset [n]$)をみたす $\{y_I\}$ を用いて $P_n^Y(\{z_I\}) = P_n^Y(\{y_I\})$ と表される generalized permutohedron $\cdots (*)$ について考える。



7



Generalized permutohedra

定義 (building set)

$B \subset 2^{[n]}$ が **building set** $\Leftrightarrow B$ は以下の2条件をみたす

- (i) $I, J \in B, I \cap J \neq \emptyset \Rightarrow I \cup J \in B$;
- (ii) $\{i\} \in B$ ($i = 1, \dots, n$)

定義 (nestohedron)

Building set $B \subset 2^{[n]}$ に付随する格子多面体

$$P_B = \sum_{S \in B} \Delta_S$$

を **nestohedron** という。

Postnikov (2009) 任意の nestohedron は非特異である。

8



主結果

定理 (Higashitani-O.)

$y_I \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($\emptyset \neq I \subset [n]$)をみたす $\{y_I\}$ に対して以下が成り立つ:

- (a) 格子多面体 $P_n^Y(\{y_I\})$ は IDP を持つ。
- (b) 格子多面体 $P_n^Y(\{y_I\})$ のトーリックイデアルはスクエアフリーなイニシャルイデアルを持つ。
- (a) 格子多面体 $P_n^Y(\{y_I\})$ のトーリックイデアルは2次生成である。

系 任意の nestohedron に対して小田予想, Bøgvad予想は正しい。

9



一般化された入れ子配置 (渋谷)

T. Shibuta, Groebner bases of contraction ideals

J. Algebraic combin. **36** (2012) 1–19.

定義 $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^s$, $B_i = \{b_1^{(i)}, \dots, b_{\lambda_i}^{(i)}\} \subset \mathbb{Z}^n$ ($i = 1, 2, \dots, s$): 配置

$$A[B_1, \dots, B_s] := \left\{ \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{\lambda_i} a_j^{(i)} b_j^{(i)} : a_j^{(i)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \left(\sum_{j=1}^{\lambda_1} a_j^{(1)}, \dots, \sum_{j=1}^{\lambda_s} a_j^{(s)} \right) \in A \right\}$$

を $A, B_1, \dots, B_s$ に付随する, **一般化された入れ子配置**という。

例 $A = \{(1, 1, \dots, 1)\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^s$ とし, $B_1, \dots, B_s$ を配置とすれば,

$$A[B_1, \dots, B_s] = \{b_1 + \dots + b_s : b_i \in B_i\}$$

10



一般化された入れ子配置 (渋谷)

定理 (渋谷 (2012))

$K[z^{\pm}] = K[z_1^{\pm}, \dots, z_n^{\pm}]$: K 上のローラン多項式環 ($\deg(z_i) = v_i \in \mathbb{Q}^d$)

$u_1, \dots, u_s \in \mathbb{Q}^d$: $\mathbb{Q}$ 上1次独立なベクトル

配置 $B_1, \dots, B_s \subset \mathbb{Z}^n$ が $B_i \subset \{b \in \mathbb{Z}^n : \deg(z^b) = u_i\}$ をみたすとする
配置 $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^s$ と, $B = B_1 \cup \dots \cup B_s$ に対して以下が成り立つ。

- (a) トーリックイデアル I_A, I_B が **次数が高々 m** のイニシャルイデアルを持つならば, $I_{A[B_1, \dots, B_s]}$ も持つ。
- (b) トーリックイデアル I_A, I_B が **スクエアフリー**なイニシャルイデアルを持つならば, $I_{A[B_1, \dots, B_s]}$ も持つ。

11



主定理の証明の概略

$y_I \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($\emptyset \neq I \subset [n]$) のとき,

$$P_n^Y(\{y_I\}) = \sum_{I \subset [n]} y_I \Delta_I = \sum_{I \subset [n]} \frac{(\Delta_I + \dots + \Delta_I)}{y_I}$$

これは, 以下のミンコフスキー和と一致する:

$$P_F := \Delta_{S_1} + \dots + \Delta_{S_m}$$

ただし $F = (S_1, \dots, S_m)$ は $\emptyset \neq S_i \subset [n]$ の組であり,
各 $I \subset [n]$ は F に y_I 回現れる。

$$Q_F := \text{conv}((\Delta_{S_1} \times e_1), \dots, (\Delta_{S_m} \times e_m)) \subset \mathbb{R}^{m+n}$$

$\Delta_{S_1}, \dots, \Delta_{S_m}$ の **Cayley和**

12



主定理の証明の概略

定義 $F = (S_1, \dots, S_m)$ ($\emptyset \neq S_i \subset [n]$) に対して, G を

- 頂点集合 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \cup \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$
- 辺集合 $E(G) = \{\{\alpha_j, \beta_i\} : i \in [m], j \in S_i\}$

を持つ2部グラフとする。このとき, Q_F は G の **辺凸多面体**

$$P(G) := \text{conv}\{(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) \in \{0,1\}^{n+m} : \{\alpha_j, \beta_i\} \in E(G)\}$$

と一致する (Postnikov は **root polytope** と呼んでいる)。

命題A 任意の2部グラフ G に対して, $P(G)$ は単模かつIDP。
(単模 $\Leftrightarrow P(G)$ のトーリックイデアルの任意のイニシャルイデアルはスクエアフリー)

13



主定理の証明の概略

命題B (Postnikov 2009) $P_F := \Delta_{S_1} + \dots + \Delta_{S_m}$
 $(\Delta_{S_1} \cap \mathbb{Z}^n) + \dots + (\Delta_{S_m} \cap \mathbb{Z}^n) = P_F \cap \mathbb{Z}^n$

命題C (Tsuchiya 2018)

格子多面体 $P_1, \dots, P_m \subset \mathbb{R}^n$ の Cayley 和が IDP

$\Rightarrow \forall a_1, \dots, \forall a_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $\sum_{i=1}^m a_i P_i$ は IDP.

(実際には, $\sum_{i=1}^m (a_i P_i \cap \mathbb{Z}^n) = (\sum_{i=1}^m a_i P_i) \cap \mathbb{Z}^n$ など分かる)

- 命題A,Cによって, P_F は IDP である。
- スクエアフリーイニシャルイデアルの存在については
一般化された入れ子配置の理論を適用する。

14



主定理の証明の概略

$$A = \{(1, 1, \dots, 1)\} \subset \mathbb{Z}^m$$

$$B_i = \{(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i) \in \{0,1\}^{m+n} : \mathbf{a} \in \Delta_{S_i} \cap \mathbb{Z}^n\} \quad (i = 1, \dots, m)$$

とおくと, 一般化された入れ子配置 $A[B_1, \dots, B_m]$ は

$$A[B_1, \dots, B_m] = \left\{ \left(\sum_{k=1}^m e_{j_k}, 1, \dots, 1 \right) \in \mathbb{Z}^{n+m} : j_k \in S_k \quad (k = 1, \dots, m) \right\}$$

となり, 「集合」としては P_F の頂点集合に対応する。

注意:

多重集合 $A[B_1, \dots, B_m]$ のトーリックイデアルは1次式を含むかも。

15



主定理の証明の概略

$$A = \{(1, 1, \dots, 1)\} \subset \mathbb{Z}^m$$

$$B_i = \{(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i) \in \{0,1\}^{m+n} : \mathbf{a} \in \Delta_{S_i} \cap \mathbb{Z}^n\} \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$A[B_1, \dots, B_m] = \left\{ \left(\sum_{k=1}^m e_{j_k}, 1, \dots, 1 \right) \in \mathbb{Z}^{n+m} : j_k \in S_k \quad (k = 1, \dots, m) \right\}$$

- $B = B_1 \cup \dots \cup B_m = Q_F \cap \mathbb{Z}^{n+m}$ であるから, 任意の単項式順序に関して, イニシャルイデアルはスクエアフリー。

P_F のトーリックイデアルにスクエアフリーなイニシャルイデアルが存在することが従う。

16



主定理の証明の概略

2次生成の証明の概略:

- Q_F のトーリックイデアルのグレブナー基底はグラフの偶サイクルに付随する2項式からなる (次数はサイクルの長さの半分)
(2次のものが存在 $\Leftrightarrow$ 対応する2部グラフが chordal bipartite)
- 洪田の定理によって得られる, $A[B_1, \dots, B_m]$ のグレブナー基底の3次以上の元が, 2次以下の元で生成できることを証明した。

ご清聴ありがとうございました!

17