対称群の作用で固定される単項式イデアルのBetti table

村井 聡
(早稲田大学教育学部)

2020年5月3日

今日のお題：Symmetric monomial idealのベッチ数

k : field
$\mathfrak{S}_n$: n次対称群

変数のpermutation

$S_n = k[x_1, \cdots, x_n] \curvearrowleft \mathfrak{S}_n$

$I \subset S_n$ が symmetric $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\sigma(I) = I \ \ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$.

例

(x_1^2, x_1x_2, x_2^2), (x_1^2, x_2^2), (x_1, x_2) — symmetric

(x_1^2, x_1x_2) — not symmetri

基本的なこと

$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$ が partition
$\Leftrightarrow \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$

◎ 生成元は partition で書くと楽

$(x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$

$= (\sigma(x_1^3 x_2^0 x_3^0), \sigma(x_1^1 x_2^1 x_3^0) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_3)$

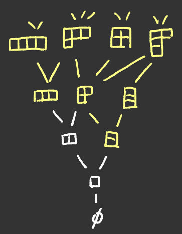
$= \langle (3,0,0), (1,1,0) \rangle_{\mathfrak{S}_3}$ とかく

余計なこと

symmetric 単項式イデアル (in $k[x_1, \cdots, x_n]$) $\longleftrightarrow$ (長さn以下の) partition 全体から成る poset 上の filter

例 ($n=3$)

$\langle ⊞, 日 \rangle_{\mathfrak{S}_3} \longleftrightarrow$



Question

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$: partition

$I_n = \langle \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t \rangle_{\mathfrak{S}_n}$ とする。

nを大きくしていくと I_n の代数的性質はどう変化する?

ex $J_n = \langle (5,1), (2,2) \rangle_{\mathfrak{S}_n}$

$J_2 = (x_1^5 x_2, x_1 x_2^5, x_1^2 x_2^2)$

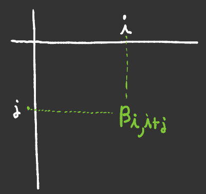
$J_3 = \begin{pmatrix} x_1^5 x_2, x_1 x_2^5, x_1^5 x_3, x_1 x_3^5, x_2^5 x_3, x_2 x_3^5, \\ x_1^2 x_2^2, x_1^2 x_3^2, x_2^2 x_3^2 \end{pmatrix}$

$J_4 = \cdots$

Notation (Betti numbers & Betti tables)

◎ $\beta_{ij}(I) = \dim_k \operatorname{Tor}_i(I, k)_j$ (graded Betti numbers)

◎ Betti table ⋯ (i,j)-entry が $\beta_{i,i+j}$ である表



例 $I = (x_1^5 x_2, x_1 x_2^5, x_1^2 x_2^2)$ とすると

$\beta_{04}(I) = 1$, $\beta_{06}(I) = 2$, $\beta_{17}(I) = 2$

	0	1	2
4	1	0	0
5	0	0	0
6	2	2	0
7	0	0	0

Example $J_n = \langle (5,1), (2,2) \rangle$

J_4	0	1	2	3
4	**6**	-	-	-
5	-	**8**	-	-
6	**12**	**24**	**7**	-
7	-	-	**12**	-
8	-	-	-	**4**

⇒

J_5	0	1	2	3	4
4	**10**	-	-	-	-
5	-	**20**	-	-	-
6	**20**	**50**	**35**	**5**	-
7	-	-	**30**	**4**	-
8	-	-	-	**20**	-
9	-	-	-	-	**5**

⇒

J_6	0	1	2	3	4	5
4	**15**	-	-	-	-	-
5	-	**40**	-	-	-	-
6	**30**	**90**	**105**	**30**	**6**	-
7	-	-	**60**	**24**	-	-
8	-	-	-	**60**	**5**	-
9	-	-	-	-	**30**	-
10	-	-	-	-	-	**6**

Betti tableの非零部分の変化に注目

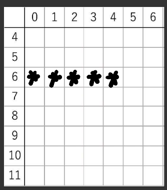
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
4	*								
5		*							
6	*	*	*	$*^5$	$*^6$				
7			*	$*^5$					
8				*	$*^6$				
9					$*^5$				
10						$*^6$			
11									
12									
13									

* $n \leq 6$
* $n = 7$
* $n = 8$
* $n = 9$

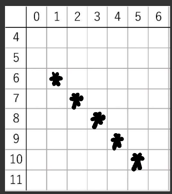
推測 Betti tableは次の形のものの和でかけるのでは?

$$\mathcal{L}((i,j),c,\ell) \overset{\text{def}}{=} \{(i+k,\ j+ck) \mid k=0,1,\cdots,\ell-1\}$$

例



$\mathcal{L}((0,6),1,5)$
スタート　傾き　長さ



$\mathcal{L}((1,7),2,5)$

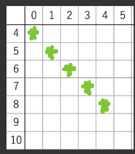
実際、先の例 $J_n = \langle (5,1),(2,2)\rangle_{\mathfrak{S}_n}$ の場合、次が成立。

$$\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 \mid \beta_{i,j}(J_n)\neq 0\} = \mathcal{L}((0,4),2,n-1)\cup\mathcal{L}((0,6),1,n-1)\cup\mathcal{L}((1,7),2,n-1)$$

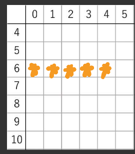
n=6の場合

J_6	0	1	2	3	4	5
4	15	-	-	-	-	-
5	-	40	-	-	-	-
6	30	90	105	30	6	-
7	-	-	60	24	-	-
8	-	-	-	60	5	-
9	-	-	-	-	30	-
10	-	-	-	-	-	6

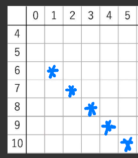
=



+



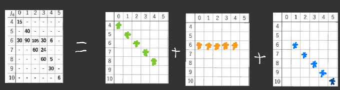
+



Thm (M) $\lambda_1,\cdots,\lambda_t$: partition of length $\leq m$.
$I_n = \langle \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t\rangle_{\mathfrak{S}_n}$. ある有限集合 $D\subset\mathbb{Z}^2\times\mathbb{Z}$ があり、$\forall n\geq m$,

$$\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 \mid \beta_{i,j}(I_n)\neq 0\}$$
$$= \Big(\bigcup_{(i,j,c)\in D}\mathcal{L}((i,j),c,n-m+1)\Big)\cup\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 \mid \beta_{i,j}(I_{m-1})\neq 0\}$$

直線の和　　有限コの例外



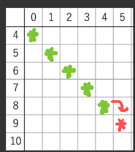
$I_{m-1} = \langle \lambda_k \mid \lambda_k の長さ < m\rangle_{\mathfrak{S}_{m-1}}$

Idea of proof （$\mathbb{Z}^n$-gradingを考える。）

⓪ 次を示す。$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq 1$ として、

(*) $\quad \beta_{i,(a_1,a_2,\cdots,a_n)}(I_n)\neq 0 \Leftrightarrow \beta_{i+1,(a_1,a_2,\cdots,a_n,a_n)}(I_{n+1})\neq 0$

$\mathbb{Z}^n$-graded Betti number



Idea of proof （$\mathbb{Z}^n$-gradingを考える。）

⓪ 次を示す。$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq 1$ として、

(*) $\quad \beta_{i,(a_1,a_2,\cdots,a_n)}(I_n)\neq 0 \Leftrightarrow \beta_{i+1,(a_1,a_2,\cdots,a_n,a_n)}(I_{n+1})\neq 0$

$\mathbb{Z}^n$-graded Betti number

(*)の証明のidea：両辺は単体的複体のホモロジーとして表せる。
右辺の単体的複体は左辺の複体のsuspensionのようになる。

---

regularity についての予想

$$\mathrm{reg}(I) = \max\{j \mid \beta_{i,i+j}(I)\neq 0\ \exists i\}$$

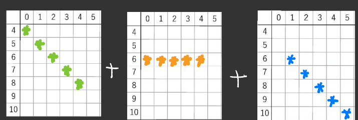
	0	1	2
4	1	0	0
5	0	0	0
reg → 6	2	2	0
7	0	0	0

Conjecture (Le-Nagel-Nguyen-Römer)
$f_1,f_2,\cdots,f_\ell$: polynomial
$I_n = (\sigma(f_k) \mid k=1,2,\cdots,\ell,\ \sigma\in\mathfrak{S}_n)\subset S_n$
このとき、$n\gg 0$ で $\mathrm{reg}(I_n)$ は nについての一次関数になる。

---

regularity についての予想

Cor (M, Raicu (独立に証明))
先の予想は monomial idealの場合は正しい。



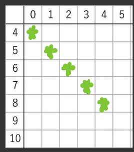
Raicuさんの仕事を少し紹介

Thm (Raicu 2020+)
$I\subset S_n$: symmetric単項式イデアル $\Rightarrow$ S_n/I は sequentially CM.

上のThmのCorとして ⟶ Combinatorial formula for regularity & proj.dim
(少し複雑なので具体的な形は省略)

What's next

① $\beta_{i,j}$の数の変化をとらえる。 (work in Progress with C.Raicu)



② power の regularity

☆ 1つのpartitionで生成されるもの (by Raicu)

③ もっと一般の symmetric ideal について何か言えるか?

☆ Specht ideal だと?

☆ toric ideal だと?