

Gorenstein graphic matroids

松田 徳
(北見工業大学)

2020年5月3日

オンライン研究集会 組合せ論と可換環論

本講演の内容は、以下の論文

Takayuki Hibi, Michał Lasoń,
Kazunori Matsuda, Mateusz Michałek
and Martin Vodička.

"Gorenstein graphic matroids"
Israel J. Math, to appear.

に基づく、

概要

G : 単純グラフ, K : 体

- G から, トーリック環 $K[M(G)]$ を作る

(G の ^{極大} spanning forest に monomial を対応させ. それらで生成される mon. subalgebra を考える)

- $K[M(G)]$ は常に Cohen-Macaulay

- $K[M(G)]$ はいっ Gorenstein になるか, ?

h-vector と a-invariant

Def

- R : standard graded CM domain / $\overset{\text{field}}{\downarrow} K$
- $H(R, t) = \sum_{i \geq 0} \dim_K R_i t^i = \frac{h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \dots + h_s t^s}{(1-t)^{\dim R}}$

◦ R の Hilbert 級数

(1) $(h_0, h_1, h_2, \dots, h_s)$ ◦ R の $\overset{0}{\#}$ h -vector

(2) [Goto-Watanabe (1978)]

$a(R) = s - \dim R$ ◦ R の a -invariant

h -vector による Gor. 性判定法

Thm ([Stanley (1978)])

- R : standard graded CM domain
- $(h_0, h_1, \dots, h_s)$: R の h -vector

このとき,

$$R: \text{Gor.} \iff h_i = h_{s-i} \text{ for } 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$$

$K[M(G)]$ の定義、(1)

Def (spanning forest)

- $G = (V(G), E(G))$: 単純グラフ
頂点集合 辺集合
- $T \subset G$: 部分グラフ

T : G の spanning forest

$\Leftrightarrow^{\text{def}}$

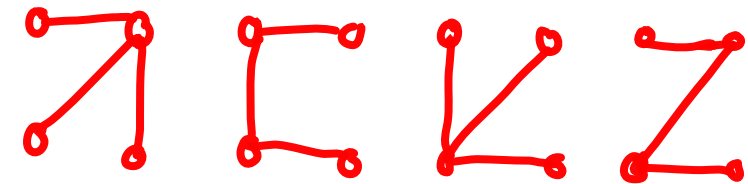
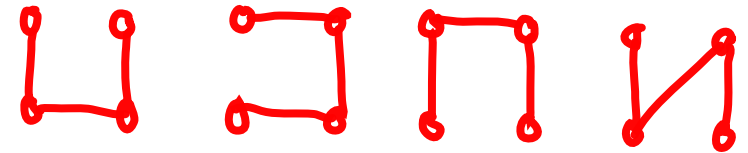
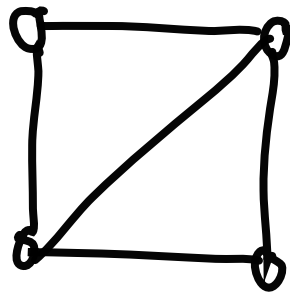
T : $V(T) = V(G)$ かつ

T はサイクルを含まない

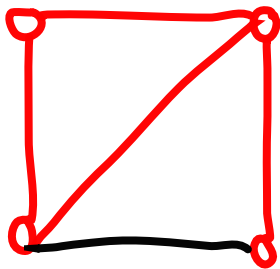
$K[M(G)]$ の定義 (2)

Ex

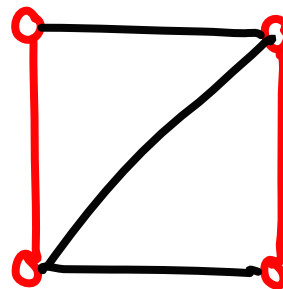
$G =$



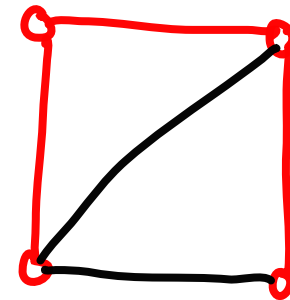
G の 極大 span. forest



span. forest
でない



極大でない
span. forest



極大
span. forest

$K[M(G)]$ の定義 (3)

Def

- $G = (V(G), E(G))$: 単純グラフ
- $E(G) = \{e_1, \dots, e_n\}$
- $K[t_1, \dots, t_n]$: poly. ring / K : field

$$K[M(G)] := K \left[\prod_{e_i \in T} t_i \mid T \subset G : \begin{array}{l} \text{極大} \\ \text{span. forest} \end{array} \right]$$
$$\subset K[t_1, \dots, t_n]$$

$K[M(G)]$ に関する補足(1)

Rem

(1) [Hochster (1972)], [White (1977)]

$K[M(G)]$ は **Cohen-Macaulay normal** で

$$\dim K[M(G)] = |E(G)| - \left(\begin{array}{c} G \text{ の 2-連結} \\ \text{成分の個数} \end{array} \right) + 1$$

特に, $G: 2\text{-連結} \Rightarrow \dim K[M(G)] = |E(G)|$

(2) [Blasiak (2008)]

$K[M(G)]$ の トーリックイデアルは **2-次生成**

$K[M(G)]$ に関する補足(2)

(3) $-a(K[M(G)]) > 0$ であり,

$$-a(K[M(G)]) = 1$$

$\Leftrightarrow G : \text{forest}$

$\Leftrightarrow K[M(G)] \cong 1\text{-dim poly. ring}$

$K[M(G)]$ に関する補足 (3)

(4) 単純グラフ G に対し,

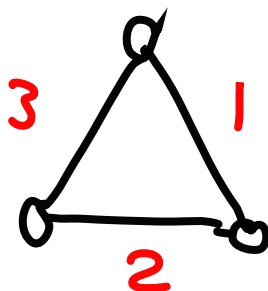
$$\begin{cases} E(G) : G \text{ の辺集合} \\ B(G) : G \text{ の極大 span, forest 全体の集合} \end{cases}$$

とおくと、 $M(G) = (E(G), B(G))$ はマトロイド
となる。 $M(G)$ を G の **グラフ・マトロイド** という。

$K[M(G)]$ は、マトロイド $M(G)$ の **basic monomial ring** に相当する。

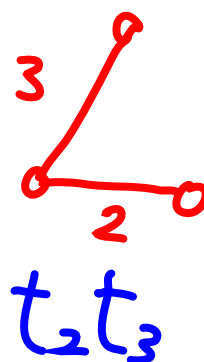
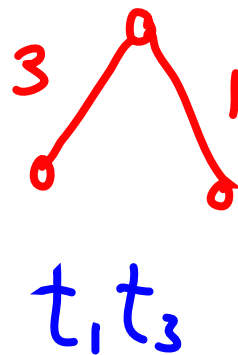
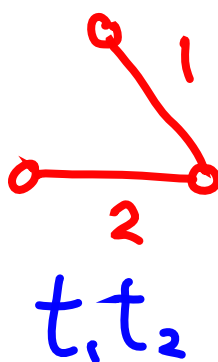
Ex(1) (サイクル)

$$G = C_3$$



$$E(G) = \{1, 2, 3\}$$

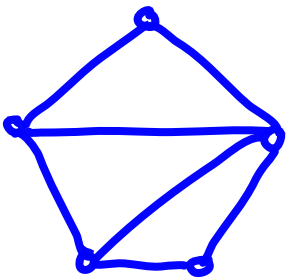
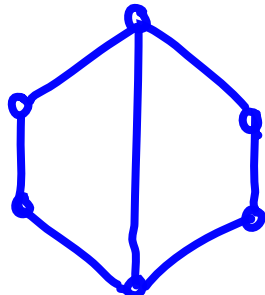
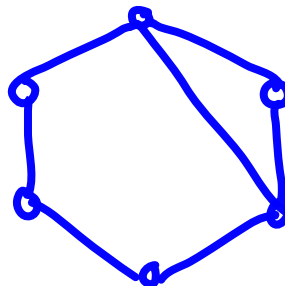
極大
span. forest



$$\leadsto K[M(G)] = K[t_1 t_2, t_1 t_3, t_2 t_3] \cong \begin{matrix} 3\text{-dim} \\ \text{poly. ring} \end{matrix}$$

$$\text{一般に, } K[M(C_n)] \cong n\text{-dim poly. ring}$$

Ex(2) (3つとも7次元)

グラフ	h-vector	環のクラス
	$(1, 14, 31, 14, 1)$	Gor
	$(1, 8, 9, 1)$	almost Gor.
	$(1, 7, 6)$	CM

本講演で考えた問題

Q. G : 単純グラフ

$K[M(G)]$ はいっ G or. となるか?

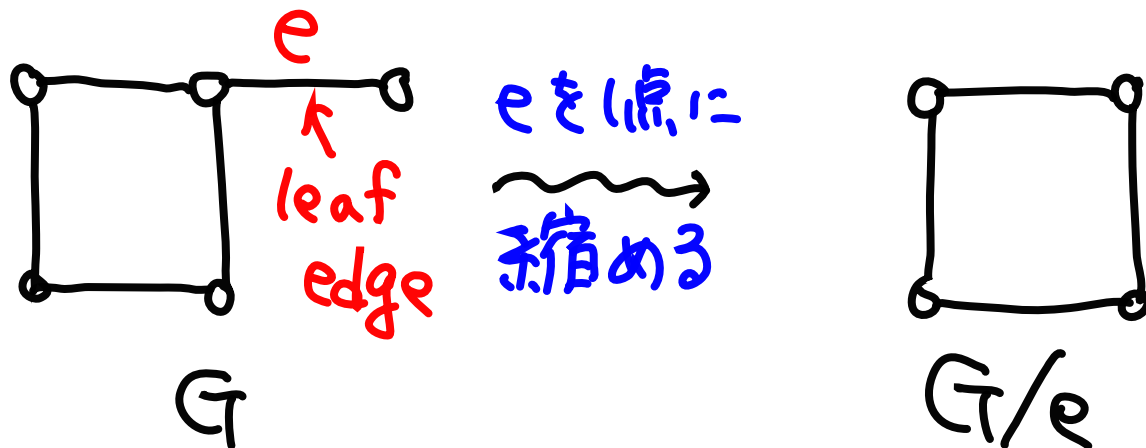
$K[M(G)]$ の Gor. 性についての補足 (1)

Rem $G = (V(G), E(G))$: 単純グラフ

(1) $\exists e \in E(G)$: leaf edge

$$\Rightarrow K[M(G)] \cong K[M(G/e)]$$

縮約

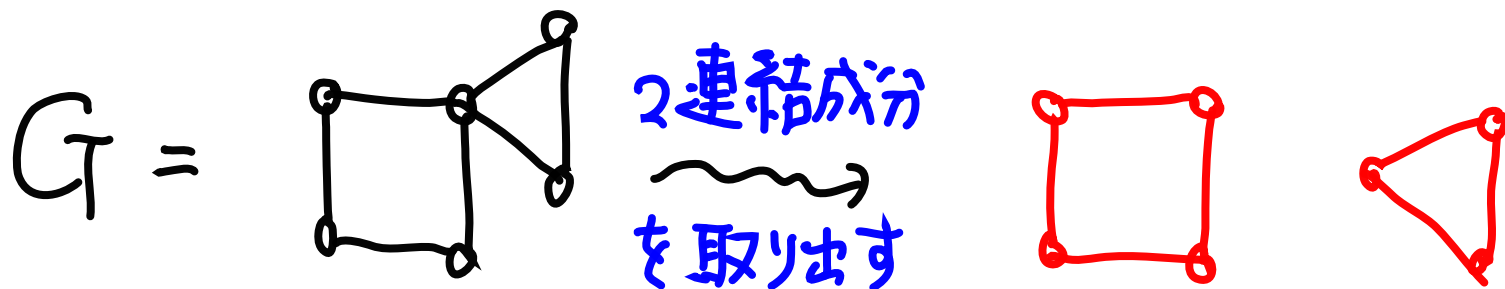


$K[M(G)]$ の Gor. 性についての補足 (2)

(2) $G_1, \dots, G_r : G$ の 2 連結成分

$$\Rightarrow K[M(G)] \cong K[M(G_1)] \# \dots \# K[M(G_r)]$$

↑ Segre 積



$$\Rightarrow K[M(G)] \cong K[M(\text{square})] \# K[M(\text{triangle})]$$

$K[M(G)]$ の Gor. 性についての補足 (3)

(3) [Goto-Watanabe (1978)]

$K[M(G)]$: Gor. with $-a(K[M(G)]) = \delta$

$\Leftrightarrow$ G の任意の 2 連結成分 G' は
以下のいずれかを満たす:

(i) $K[M(G')]$: Gor. with $-a(K[M(G')]) = \delta$

(ii) $G' = K_2$

本講演で考えた問題

Q. G : 単純 2 連結 グラフ

$K[M(G)]$ は Gor. となるか?

G : 2 連結 $\Rightarrow -a(K[M(G)]) \geq 2$

$\begin{cases} = 2 \\ > 2 \end{cases}$ の場合に分けて考える.

$K[M(G)]$ の Gor. 性 (1)

Def (good flat)

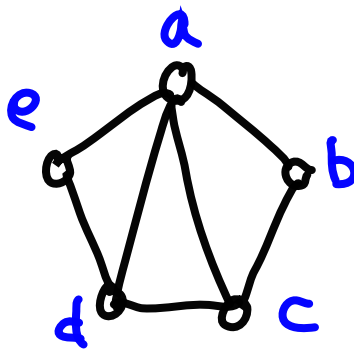
• $G = (V(G), E(G))$: 2連結

$S \subset V(G)$: good flat

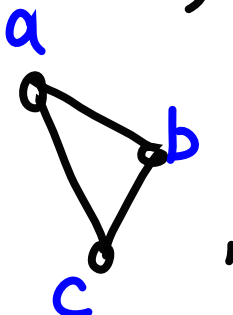
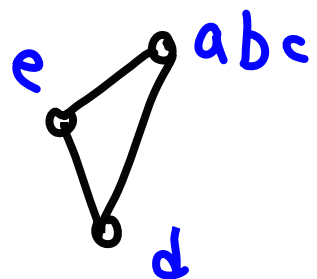
$\stackrel{\text{def}}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} G_S \leftarrow G \text{ の } S \text{ 上の誘導部分グラフ} \\ E(S) \text{ の縮約} \leftarrow E(G_S) \text{ の辺を 1 点に} \\ \text{つばいて得られるグラフ} \end{array} \right.$

が両方とも 2連結

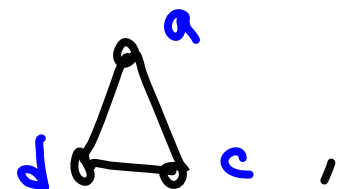
$K[M(G)]$ の Gor. 性 (2)

Ex $G =$  $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$

• $S = \{a, b, c\} \leftarrow \text{good flat}$

$G_S =$ , $E(S)$ の縮約 = 

• $S = \{a, c, d\} \leftarrow \text{good flat ではない}$

$G_S =$ , $E(S)$ の縮約 = 

$K[M(G)]$ の Gor. 性 (3)

Thm G : 2連結

$\delta \geq 2$

$K[M(G)]$: Gor. with $-a(K[M(G)]) = \delta$

$\Leftrightarrow$ G の各辺に, 以下のよう^に 重み

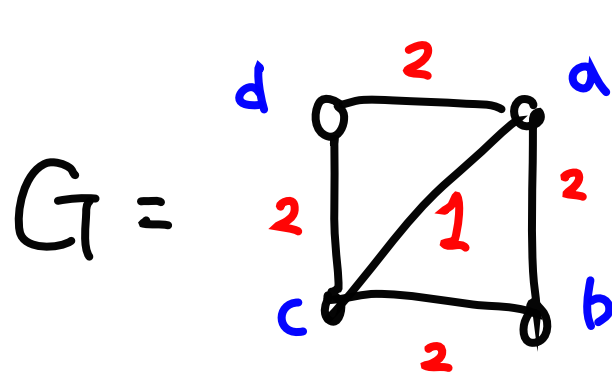
$$w(e) = \begin{cases} \delta - 1 & (G/e: 2\text{-連結}) \\ 1 & (\text{o.w.}) \end{cases}$$

をつけたとき, 以下の 2 条件を満たす:

$$(1) \quad w(E) = \sum_{e \in E(G)} w(e) = \delta \cdot (|V(G)| - 1)$$

$$(2) \quad w(E(G_S)) + 1 = \delta \cdot (|S| - 1) \quad \forall S \subset V(G): \begin{matrix} \text{good} \\ \text{flat} \end{matrix}$$

Ex ① (Gor. と 3 つめ)



$w(e)$

$$V(G) = \{a, b, c, d\}$$

good flat S	$ S $	$w(E(G_S))$
ab, bc, cd, ad	2	2
abc, acd	3	5

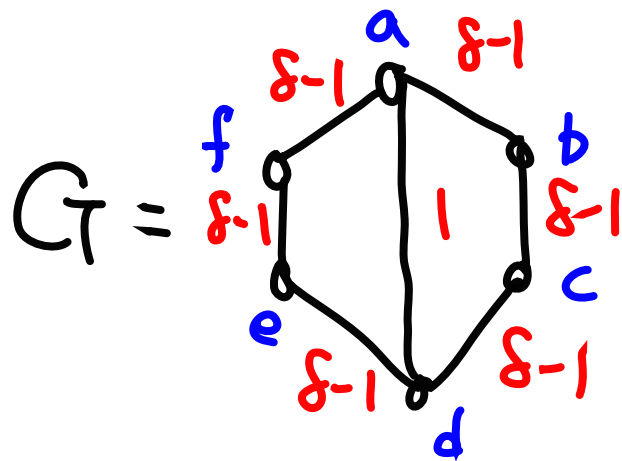
$$\bullet w(E) = 9 = 3 \cdot (4 - 1)$$

$$\bullet w(E(G_S)) + 1 = 3 \cdot (|S| - 1)$$

$$\Rightarrow K[M(G)] : \text{Gor}$$

with $-a(K[M(G)]) = 3$

Ex ② (Gor. でないもの)



$w(e)$

$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$$

- $K[M(G)]$ に対し Gor. とすると, 条件(1) より

$$w(E) = 6\delta - 5 = \delta \cdot (6 - 1) \Rightarrow \delta = 5$$

- $S = \{a, b, c, d\}$ は good flat であるが,

$$w(E(G_S)) + 1 = 14 \neq 5 \cdot (4 - 1)$$

となり, 条件(2) を満たさない $\nexists$

$K[M(G)] : \text{Gor. with } -a(K[M(G)]) > 2 \text{ \& } \exists G$

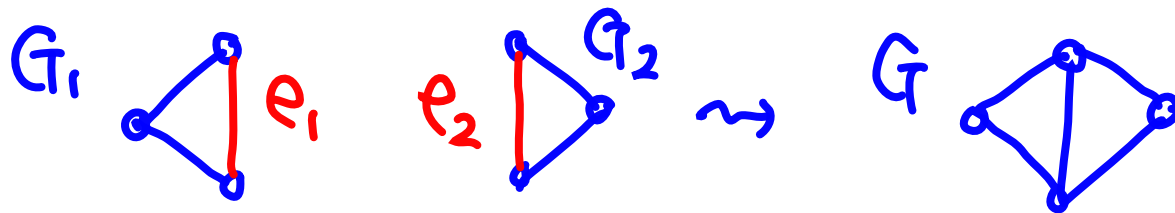
Prop A

- $\delta > 2$
- $G_1, \dots, G_{\delta-1} : 2\text{-連結}$

$K[M(G_i)] : \text{Gor. with } -a(K[M(G_i)]) = \delta$

$e_i \in E(G_i), \omega(e_i) = \delta - 1 \quad (1 \leq i \leq \delta - 1)$

- $G : \text{glueing of } G_1, \dots, G_{\delta-1} \text{ along } e_1, \dots, e_{\delta-1}$



$\Rightarrow K[M(G)] : \text{Gor. with } -a(K[M(G)]) = \delta$

Prop B

- $\delta \geq 2$
- G : 2-連結, $K[M(G)]$: G or. with $-a(K[M(G)]) = \delta$
- $e \in E(G)$, $w(e) = 1$
- G' : G の辺 e を $(\delta-2)$ 回 細分 することによって得られるグラフ



$\Rightarrow K[M(G')]$: G or. with $-a(K[M(G')]) = \delta$

Thm

- $\delta > 2$

- G : 2-連結

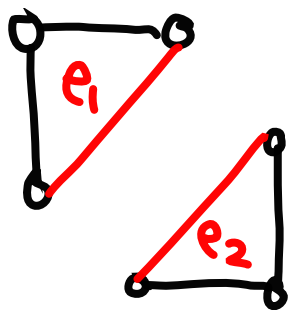
TFAE:

(1) $K[M(G)]$: G or, with $-a(K[M(G)]) = \delta$

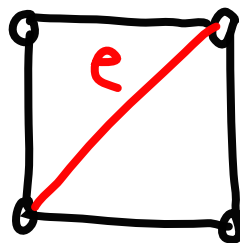
(2) G は, C_δ に Prop A または Prop B
glueing $\omega(e)=1$ なる e を 追加

で紹介した操作をくり返すことで得られる。

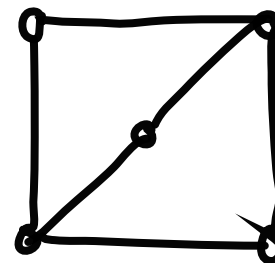
E_x ($\delta = 3$)



Prop A
 $\rightsquigarrow$
 glueing



Prop B
 $\rightsquigarrow$
 $e \in$
 1D 细分



h -vector

(1)

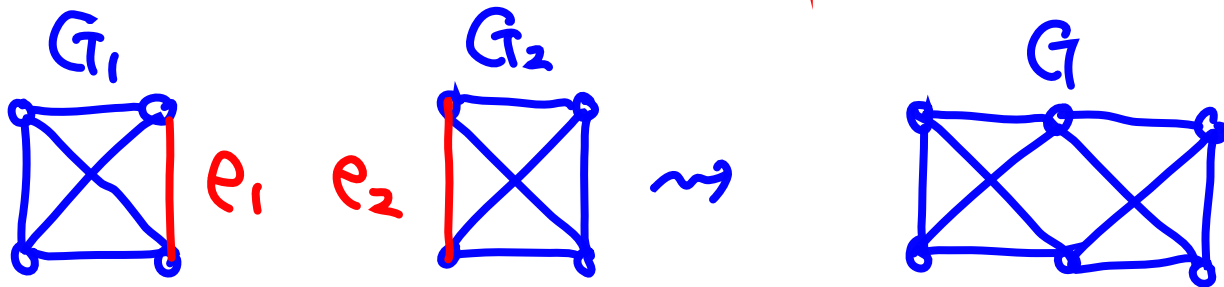
(1.3.1)

(1.6.6.1)

$K[M(G)] : \text{Gor. with } -a(K[M(G)]) = 2 \text{ と } \exists G$

Prop C

- $G_1, G_2 : 2\text{-連結}$
- $K[M(G_i)] : \text{Gor. with } -a(K[M(G_i)]) = 2 \text{ } (i=1,2)$
- $e_1 \in E(G_1), e_2 \in E(G_2)$
- $G : \text{collision of } G_1 \text{ and } G_2 \text{ on } e_1 \text{ and } e_2$



$\Rightarrow K[M(G)] : \text{Gor. with } -a(K[M(G)]) = 2$

Thm

• G : 2-連結

TFAE:

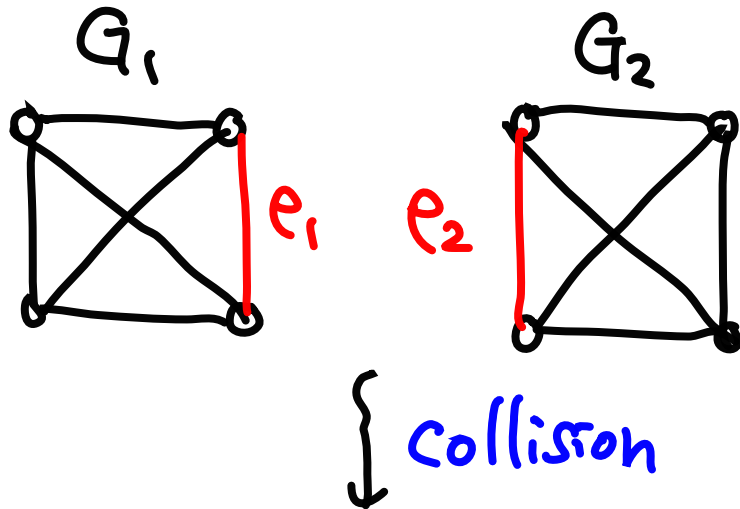
(1) $K[M(G)]$: G or, with $-d(K[M(G)])=2$

(2) G is, K_4 に collision をくり返す

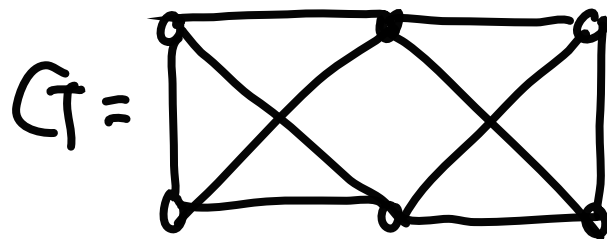
として得られる.

Ex ③ $G_1 = G_2 = K_4$

h-vector



$(1, 10, 20, 10, 1)$



$(1, 118, 2208,$
 $11198, 18884, 11198,$
 $2208, 118, 1)$

$K[M(G)]$ が Gor. となる n 頂点 2 連結
単純グラフの個数 ($n \leq 9$)

• $n \leq 4 \Rightarrow K[M(G)] : \text{Gor.}$

n	連結	2連結	Gor.
5	21	10	3
6	112	56	6
7	853	468	11
8	11117	7123	35
9	261080	194066	105

ご清聴

ありがとうございました。